Musterprüfung II – A

Teil A

Aufgabe 1

Da in der Klammer ein Produkt $(3 \cdot x^4)$ steht, muss beim Potenzieren dieser Klammer jeder einzelne Faktor innerhalb der Klammer potenziert werden. In der hier falschen Lösung wurde nur der zweite Faktor x^4 potenziert, nicht aber der erste Faktor 3.

Fehlerberichtigung: $(3x^4)^2 = 3^2 \cdot (x^4)^2 = 9 \cdot x^8$

Aufgabe 2

a) Auch bei Angebot B handelt es sich um eine lineare Funktion.

$y = 0{,}2x + 10$ (x in km; y in €)

b) In die Funktionsgleichung $y = 0{,}4x$ muss für x der Wert 80 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}4 \cdot 80 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Die Fahrt kostet bei Angebot A folglich 32 €.

Aufgabe 3

☑ Die Anzahl einer bestimmten Bakterienart verdoppelt sich im Labor alle 20 Minuten.

Bei den anderen beiden Sachverhalten handelt es sich jeweils nicht um exponentielles Wachstum.

Aufgabe 4

Da die trigonometrische Beziehung $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ nur in rechtwinkligen Dreiecken gilt, muss dasjenige Dreieck in der Skizze gefunden werden, das rechtwinklig ist. Da der Punkt E auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{CD}$ liegt, ist das Dreieck CDE nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Folglich gilt die trigonometrische Beziehung $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ im Dreieck CDE.

Aufgabe 5

Faktor: 8

Mögliche, aber für die Lösung nicht notwendige Begründung:

$$V_{\text{ursprüngliche Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Eine Kugel mit doppeltem Durchmesser hat auch den doppelten Radius. Also gilt:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel mit doppeltem Durchmesser}} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot r^3 \\ &= 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ &= 8 \cdot V_{\text{ursprüngliche Kugel}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die richtige Zuordnung ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Sachverhalt	Graph
Zerfall eines radioaktiven Stoffs x-Achse: Zeit y-Achse: Restmenge	4
Bewegung eines Pendels x-Achse: Zeit y-Achse: Geschwindigkeit	3

Mögliche, aber für die Lösung nicht notwendige Begründung:

Der Zerfall eines radioaktiven Stoffs kann durch ein exponentielles Abklingen modelliert werden. Der Graph eines solchen exponentiellen Abklingens hat die Form von Graph 4.

Die Bewegung eines Pendels kann durch eine Sinuskurve modelliert werden. Der Graph einer solchen Sinuskurve hat die Form von Graph 3.

Aufgabe 7

a) Im Baumdiagramm stehen beim ersten und beim zweiten Ziehen der Kugel als Wahrscheinlichkeiten an allen Pfaden vollständig gekürzte Brüche mit demselben Nenner (4). Dies bedeutet, dass die Anzahl der Kugeln im Behälter beim ersten und zweiten Zug identisch sein muss. Mit anderen Worten: Die im ersten Zug gezogene Kugel wird vor dem zweiten Zug zurückgelegt.

b) Im ersten Zug wird laut Baumdiagramm eine schwarze Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gezogen. Da sich zu Beginn insgesamt 20 Kugeln im Behälter befinden, muss folgende Gleichung gelten:

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{Anzahl schwarzer Kugeln zu Beginn}}{20}.$$

Durch Erweitern des Bruches $\frac{1}{4}$ mit 5 erhält man

$\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{\text{Anzahl schwarzer Kugeln zu Beginn}}{20}$.

Folglich müssen sich zu Beginn fünf schwarze Kugeln im Behälter befinden.

Aufgabe 8

Es handelt sich bei der Skizze um eine Strahlensatzfigur. Die richtige Aussage ist:

☑ $\frac{w}{b + d} = \frac{y}{e}$

Teil B

Aufgabengruppe I

Aufgabe 1

a) Einsetzen der Koordinaten des Punktes A ergibt:

$y_A = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 5$
$y_A = 9 - 6 + 5$
$y_A = 8$

Zur Ermittlung der fehlenden Koordinaten von B und C muss folgende Gleichung gelöst werden:

$x^2 + 2x + 5 = 13 \quad | -13$
$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad |$ Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$x_1 = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$; $\quad x_2 = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Damit gilt z. B. $x_B = -4$; $x_C = 2$ (oder: $x_C = -4$; $x_B = 2$).

b) $y = x^2 + 2x + 5$
$y = x^2 + 2x + 1 - 1 + 5$ | quadratische Ergänzung
$y = (x + 1)^2 - 1 + 5$
$y = (x + 1)^2 + 4$

Damit gilt: S_1 (-1 | 4)

c) Als Ansatz eignet sich für p_2: $y = -x^2 + px + q$.

Einsetzen der Koordinaten von D und E ergibt:
I: $-(-1)^2 + p \cdot (-1) + q = -12$
II: $-2^2 + p \cdot 2 + q = -9$

I: $-1 - p + q = -12$
II: $-4 + 2p + q = -9$

I aufgelöst nach q (durch Addition von (1 + p) auf beiden Seiten ergibt:
Ia: $q = p - 11$

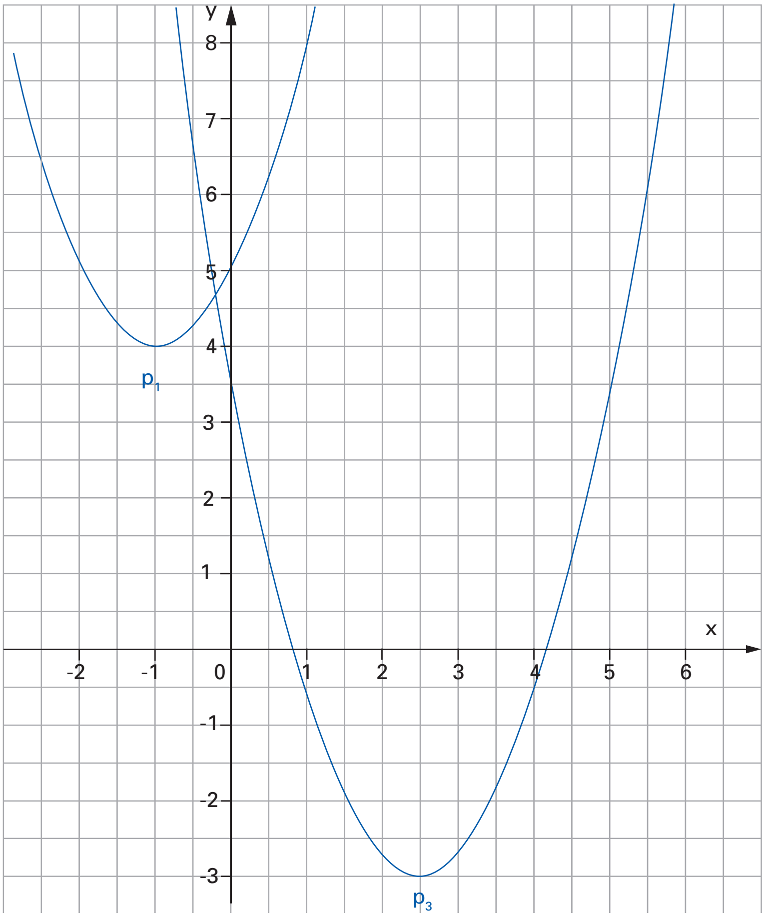
q aus Ia eingesetzt in II ergibt:
IIa: $-4 + 2p + p - 11 = -9$
$3p - 15 = -9$ | + 15
$3p = 6$ | : 3
$p = 2$

Einsetzen von p = 2 in z. B. Ia ergibt:
$q = 2 - 11$
$q = -9$

Damit gilt für p_2: $y = -x^2 + 2x - 9$.

d) Als Ansatz eignet sich die Scheitelpunktform für p_3: $y = (x - 2{,}5)^2 - 3$.
Durch Ausmultiplizieren und anschließendes Vereinfachen des Funktionsterms ergibt sich:
$y = x^2 - 2 \cdot 2{,}5x + 2{,}5^2 - 3$
$y = x^2 - 5x + 6{,}25 - 3$
$y = x^2 - 5x + 3{,}25$

e)



f) Wenn sich die Funktionsgleichung von p_4 durch das Spiegeln an der y-Achse nicht ändert, ändert sich auch der Graph (also die Parabel) nicht. Das ist aber nur möglich, wenn die Parabel p_4 symmetrisch zur y-Achse ist. Dies wiederum ist nur dann möglich, wenn der Scheitelpunkt S_4 auf der y-Achse liegt.

Aufgabe 2

Da es sich um die zweite binomische Formel handelt, muss für das gemischte Glied gelten:
$24a^6b^2 = 2 \cdot$ Anfangsglied $\cdot$ Endglied
Wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch 2 dividiert, erhält man:
$12a^6b^2 =$ Anfangsglied $\cdot$ Endglied
Da z. B. $3a^4b \cdot 4a^2b = 12a^6b^2$ ist, kann man für das Anfangsglied $3a^4b$ und für das Endglied $4a^2b$ wählen.
Dann lautet die vollständige Gleichung wie folgt:
$(3a^4b - 4a^2b)^2 = (3a^4b)^2 - 24a^6b^2 + (4a^2b)^2 = 9a^6b^2 - 24a^6b^2 + 16a^4b^2$

Anmerkung: Es gibt viele andere mögliche Lösungen.

Aufgabe 3

a) Für die Steigung m einer Geraden durch zwei Punkte $(x_1 \mid y_1)$ und $(x_2 \mid y_2)$ gilt allgemein:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Für die Gerade g_1 gilt dann mit den Punkten P und Q:
$m_1 = \frac{-4 - 5}{2 - (-1)} = \frac{-9}{3} = -3$
Damit gilt für die Funktionsgleichung von g_1: $y = -3x + t_1$.

Punktprobe z. B. mit P $(-1 \mid 5)$ ergibt:
$5 = -3 \cdot (-1) + t_1$
$5 = 3 + t_1 \qquad | -3$
$2 = t_1$

Damit lautet die Funktionsgleichung von g_1: $y = -3x + 2$.

b) Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, müssen (echt) parallel zueinander verlaufen. Das bedeutet, dass sie dieselbe Steigung, aber verschiedene y-Achsenabschnitte haben müssen. Zunächst muss man g_3 in die Normalform umformen, um die Steigung m_3 von g_3 und den y-Achsenabschnitt t_3 von g_3 zu bestimmen:
$2y = -x + 10 \qquad | : 2$
$y = -0{,}5x + 5$
Die Gerade g_3 hat also die Steigung $m_3 = -0{,}5$ und den y-Achsenabschnitt $t_3 = 5$.
Für die Funktionsgleichung einer möglichen Gerade g_2, die dieselbe Steigung wie g_3, aber einen von g_3 verschiedenen y-Achsenabschnitt hat, muss gelten: $m_2 = m_3$ und $t_2 \neq t_3$.
Eine mögliche Funktionsgleichung von g_2 ist also: $y = -0{,}5x + 1$

Anmerkung: Es gibt viele andere mögliche Lösungen.

c) Nullstelle d.h. $y = 0$
$-0{,}5x + 5 = 0 \qquad | -5$
$-0{,}5x = -5 \qquad | \cdot (-2)$
$x = 10$

Damit gilt: N $(10 \mid 0)$.

d) $y_3 = y_4$

$$
\begin{aligned}
-0{,}5x + 5 &= 2{,}5x - 4 && \mid -2{,}5x\\
-3x + 5 &= -4 && \mid -5\\
-3x &= -9 && \mid : (-3)\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Einsetzen von x = 3 in z. B. $y = 2{,}5x - 4$ ergibt:

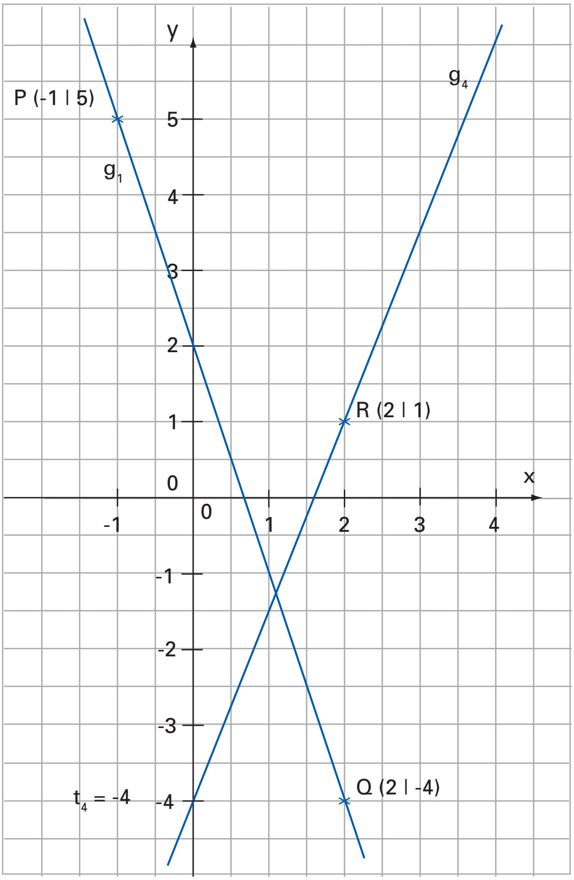
$y = 2{,}5 \cdot 3 - 4$

$y = 7{,}5 - 4$

$y = 3{,}5$

Damit ist der Schnittpunkt von g_3 und g_4 der Punkt S (3 I 3,5).

e)



$y = 2{,}5x - 4$

für x = 2:

$y = 2{,}5 \cdot 2 - 4 = 1$

Aufgabe 4

$$2 \cdot (14 \cdot x) + 2 \cdot (10{,}5 \cdot x) + 4x^2 = \frac{2}{3}(14 \cdot 10{,}5) \quad | \text{ Vereinfachen}$$
$$28x + 21x + 4x^2 = \frac{2}{3} \cdot 147 \quad | \text{ Vereinfachen}$$
$$4x^2 + 49x = 98 \quad | -98$$
$$4x^2 + 49x - 98 = 0 \quad | \text{ Lösungsformel}$$
$$x_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-98)}}{2 \cdot 4}$$
$$x_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{2401 + 1568}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{3969}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-49 \pm 63}{8}$$
$$x_1 = \frac{-49 - 63}{8} = \frac{-112}{8} = -14; \qquad x_2 = \frac{-49 + 63}{8} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Die Lösung $x_1 = -14$ ist keine sinnvolle Lösung (da es keine negativen Längen gibt).
Damit ist die einzige sinnvolle Lösung $x_2 = 1{,}75$.
Die Breite des Streifens beträgt also 1,75 m.

Aufgabe 5

a) Das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a (in cm) ist $V_{Würfel} = a^3$ (in cm³). Sechs Kugeln mit dem Radius r = 8 cm haben das Gesamtvolumen $V_{gesamt} = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 8^3 \cdot \pi$ (in cm³).
Gleichsetzen von $V_{Würfel}$ und V_{gesamt} ergibt die Gleichung:

$$a^3 = 6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 8^3 \cdot \pi \quad | \sqrt[3]{}$$
$$a = \sqrt[3]{6 \cdot \frac{4}{3} \cdot 8^3 \cdot \pi}$$
$$a \approx 23{,}4$$

Der Würfel hat eine Kantenlänge a = 23,4 cm.

b) $V_{Würfel} = a^3$

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \left(a \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right)^3 \cdot \pi$$
$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right)^3 \cdot \pi$$
$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \pi$$
$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \pi \cdot a^3 \quad | \text{ Kürzen}$$
$$V_{Kugel} = a^3$$

Folglich haben die Kugel und der Würfel das gleiche Volumen.

Aufgabe 6

- Im rechtwinkligen Dreieck BCG gilt:

$$\cos(53°) = \frac{3}{|\overline{GB}|} \qquad | \cdot |\overline{GB}|$$

$$\cos(53°) \cdot |\overline{GB}| = 3 \qquad | : \cos(53°)$$

$$|\overline{GB}| = \frac{3}{\cos(53°)}$$

$$|\overline{GB}| \approx 5{,}0$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{AK}{Hy}}$$

- Im rechtwinkligen Dreieck ABH gilt:

$$\tan(\sphericalangle HBA) = \frac{|\overline{HA}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{GB}|}{|\overline{HG}|}$$

$$\tan(\sphericalangle HBA) = \frac{5{,}0}{7{,}5}$$

$$\sphericalangle HBA \approx 33{,}7°$$

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}}$$

- Im rechtwinkligen Dreieck HBG gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$|\overline{HB}|^2 = |\overline{BG}|^2 + |\overline{HG}|^2$$

$$|\overline{HB}|^2 = 5{,}0^2 + 7{,}5^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$|\overline{HB}| \approx 9{,}0$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Die Raumdiagonale $|\overline{HB}|$ ist etwa 9,0 cm lang.

Aufgabe 7

a) Variante A: Hier handelt es sich um ein lineares Wachstum. Bei jeder Zeiteinheit (hier: jeden Monat) erhöht sich das Taschengeld um 1 €.
Damit lautet die Funktionsgleichung: $y = 10 + n \cdot 1$ (n in Monaten; y in €).
Nach 3 Jahren (nach 36 Monaten) erhält Tim zu seinem 15. Geburtstag $(10 + 36 \cdot 1)$ € = 46 €.

Variante B: Hier handelt es sich um ein exponentielles Wachstum. Bei jeder Zeiteinheit (hier: jeden Monat) erhöht sich das Taschengeld um 4 % gegenüber dem Vormonat.
Damit lautet die Funktionsgleichung: $y = 10 \cdot 1{,}04^n$ (n in Monaten; y in €).
Nach 3 Jahren (nach 36 Monaten) erhält Tim zu seinem 15. Geburtstag $(10 \cdot 1{,}04^{36})$ € ≈ 41 €.

Tim würde an seinem 15. Geburtstag folglich mit Variante A ein höheres Taschengeld erhalten.

b) Die folgende Gleichung muss nach n aufgelöst werden:

$$10 \cdot 1{,}04^n = 100 \qquad | : 10$$

$$1{,}04^n = 10 \qquad | \log_{1,04}(\ )$$

$$n = 58{,}7$$

Vom 59. Monat an erhält Tim mehr als 100 €.

c) Zwei Jahre sind 24 Monate. Damit muss folgende Gleichung nach q aufgelöst werden:

$$10 \cdot q^{24} = 200 \qquad | :10$$
$$q^{24} = 20 \qquad | \sqrt[24]{}$$
$$q \approx 1{,}133$$

Um den Prozentsatz p zu bestimmen, muss folgende Gleichung nach p aufgelöst werden:

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}133 \qquad | -1$$
$$\frac{p}{100} = 0{,}133 \qquad | \cdot 100$$
$$p = 13{,}3$$

Die gesuchte prozentuale Taschengelderhöhung beträgt also 13,3 %.

d) Auf der waagerechten Achse werden die Monate eingetragen. Da das Taschengeld nur einmal monatlich ausgezahlt wird, kann man immer nur einzelne Punkte für jeden einzelnen Monat in das Koordinatensystem eintragen, aber keine „Zwischenwerte“.

Aufgabe 8

a) $P(\text{„erste Spielerin ist A“}) = \dfrac{\text{Anzahl der für das Ereignis “günstigen” Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \dfrac{3}{11}$

b) $P(M - A - S - T) = \dfrac{5}{11} \cdot \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{264} \approx 0{,}38\ \%$

c) Hier bietet sich die Berechnung mithilfe des Gegenereignisses an:

$$P(\text{„höchstens eine M“}) = 1 - P(\text{beide sind M})$$
$$= 1 - \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}$$
$$= \frac{9}{11}$$

d) Hier geht es um die Anzahl aller möglichen Anordnungen von elf unterscheidbaren Objekten. Diese Gesamtzahl wird mit 11 ! = 39.916.800 berechnet.
Da 39.916.800 > 32 ist, ist es innerhalb einer Saison mit insgesamt 32 Spielen natürlich problemlos möglich.

$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
↓
Sprich: 11 Fakultät

Aufgabe 9

Länge der Strecke x in m:
Kathetensatz:

$$x^2 = 2 \cdot (2 + 8)$$
$$x^2 = 20 \qquad | \sqrt{}$$
$$x \approx 4{,}47$$

Mit dem Satz des Pythagoras gilt:
Länge der Strecke y in m:

$$4{,}47^2 + y^2 = 10^2 \qquad | -4{,}47^2$$
$$y^2 = 100 - 4{,}47^2 \qquad | \sqrt{}$$
$$y \approx 8{,}95$$

Mit dem Höhensatz gilt:
Länge der Strecke h in m:

$$h^2 = 2 \cdot 8$$
$$h^2 = 16 \qquad | \sqrt{}$$
$$h = 4$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten x, h und p gilt:

$$\sin(\beta) = \frac{h}{x}$$
$$\sin(\beta) = \frac{4}{4{,}47}$$
$$\beta \approx 63{,}5°$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten y, x und z gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{z}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{8{,}95}{10}$$
$$\alpha \approx 26{,}5°$$

Aufgabengruppe II

Aufgabe 1

a) Um die x-Koordinaten der Punkte N_1 und N_2 zu bestimmen, muss der zur Parabel gehörende Funktionsterm gleich 0 gesetzt und die daraus resultierende Gleichung nach x aufgelöst werden:

$$-x^2 + 7x - 10 = 0 \qquad | \text{ Lösungsformel}$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 3}{-2}$$
$$x_1 = \frac{-7 - 3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5; \qquad x_2 = \frac{-7 + 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

oder: Einsetzen von Q (3 | -2):
$-2 = -3^2 + 21 - 10$
$-2 = 2 \quad \Rightarrow \quad$ falsche Aussage
$\Rightarrow \quad Q \notin p_1$

b) Punktprobe mit Q (3 | -2):
Einsetzen von x = 3 in die Parabelgleichung von p_1 ergibt:
$y = -3^2 + 7 \cdot 3 - 10$
$y = -9 + 21 - 10$
$y = 2$

Da die y-Koordinate von Q -2 ist und $-2 \neq 2$ ist, liegt Q nicht auf p_1.

Punktprobe mit Q (7 | -10):
Einsetzen von x = 5 in die Parabelgleichung von p_1 ergibt:
$y = -7^2 + 7 \cdot 7 - 10$
$y = -49 + 49 - 10$
$y = -10$

Der Punkt P liegt also auf p_1.

c) p_2: $y = (x - 5)^2 - 4$
$= x^2 - 10x + 25 - 4$
$= x^2 - 10x + 21$

d) Gleichsetzen der beiden Funktionsterme ergibt die Gleichung:
$(x - 2)^2 + 2 = 3x - 4 \qquad |$ Ausmultiplizieren
$x^2 - 4x + 4 + 2 = 3x - 4 \qquad | \; -3x + 4$
$x^2 - 7x + 10 = 0 \qquad |$ Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2; \qquad x_2 = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

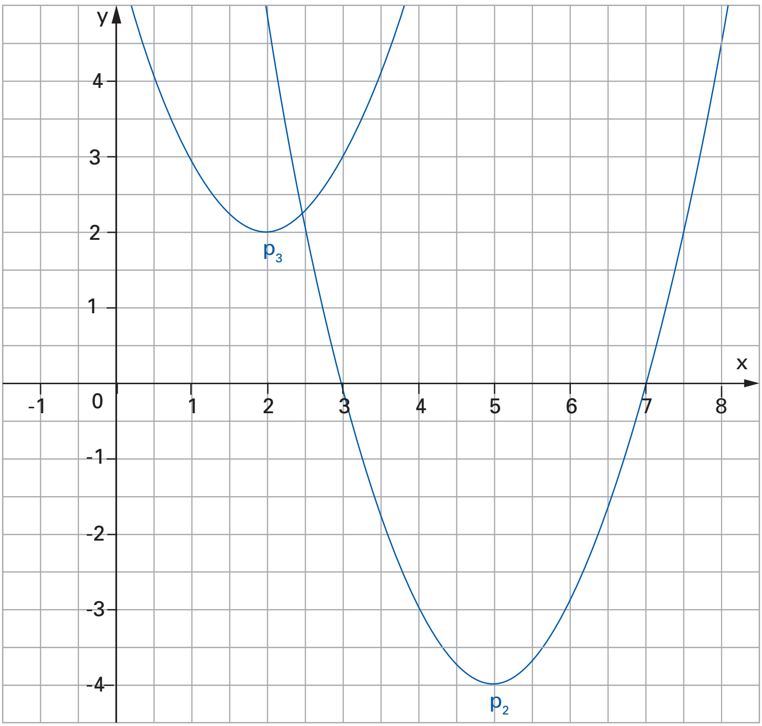
Einsetzen von $x_1 = 2$ in die Geradengleichung von g ergibt:
$y_1 = 3 \cdot 2 - 4$
$y_1 = 6 - 4$
$y_1 = 2$

Damit ist der erste Schnittpunkt der Gerade g und der Parabel p_3 der Punkt R (2 | 2).

Einsetzen von $x_2 = 5$ in die Geradengleichung von g ergibt:
$y_2 = 3 \cdot 5 - 4$
$y_2 = 15 - 4$
$y_2 = 11$

Damit ist der zweite Schnittpunkt der Gerade g und der Parabel p_3 der Punkt T (5 | 11).

e)



f) Die Parabel p_4: $y = (x - 1)^2 + 3$ ist nach oben geöffnet und hat den Scheitelpunkt S_4 (1 I 3). Nimmt man für p_5 nun denselben Scheitelpunkt S_4, lässt p_5 aber nach unten geöffnet sein, dann haben die beiden Parabeln p_4 und p_5 nur den Scheitelpunkt S_4 gemeinsam. Die Funktionsgleichung von p_5 ist dann $y = -(x - 1)^2 + 3$.

Anmerkung: Es sind auch andere Lösungswege durch Zeichnung, Text oder Rechnung möglich.

Aufgabe 2

a) Gleichung:

$$49x^2 - \boxed{168xy^2} + 144y^4 = (\boxed{7x} - 12y^2)^2$$

$2 \cdot 7x \cdot 12y^2$

b) Gleichung:

$-(4a - 9b)^2 = -16a^2 + 72ab - 81b^2$

Aufgabe 3

a) Die wahren Aussagen sind (2) und (3).

b) Punktprobe mit B (86 | -168):
$y = -2 \cdot 86 + 4$
$y = -172 + 4$
$y = -168$

Damit gilt: B liegt auf g_1.

c) Ansatz für die Funktionsgleichung von g_2: $y = m_2x + t_2$.
Da die Steigung $m_2 = \frac{1}{4}$ vorgegeben ist, gilt für die Funktionsgleichung:
$y = \frac{1}{4}x + t_2$
Einsetzen der Koordinaten von P ergibt:
$2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + t_2$
$2 = 1 + t_2 \qquad | -1$
$t_2 = 1$

Damit gilt: g_2: $y = \frac{1}{4}x + 1$

d) Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, haben zwei Geraden, die mindestens zwei gemeinsame Punkte haben, automatisch alle Punkte gemeinsam. Das bedeutet, dass solche zwei Geraden identisch sind.

Umformen der Funktionsgleichung von g_3:
$0 = 3y + 6x - 12 \qquad | -3y$
$-3y = 6x - 12 \qquad | :(-3)$
$y = -2x + 4$

Die Geraden g_1 und g_3 haben identische Funktionsgleichungen. Das bedeutet, dass sie alle Punkte gemeinsam haben und damit unter anderem auch mindestens zwei.

e) Falls $m_1 \cdot m_4 = -1$ ist, hat man gezeigt, dass g_1 und g_4 senkrecht aufeinander stehen:
$m_1 \cdot m_4 = -2 \cdot 0{,}5 = -1$

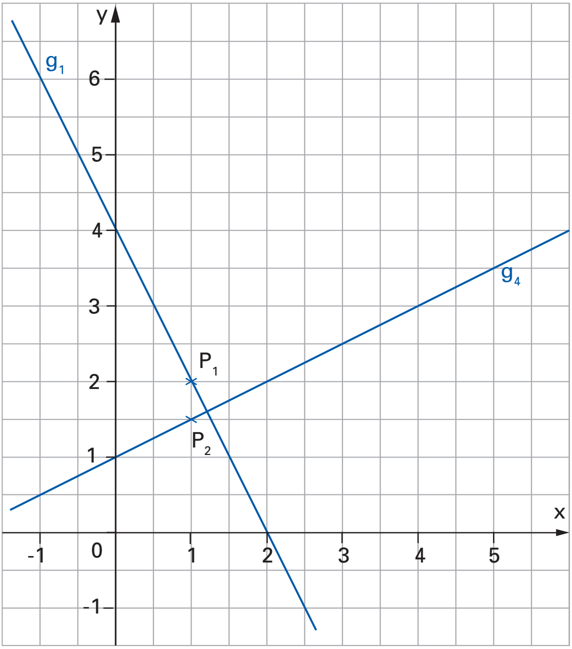
Damit ist der Nachweis erbracht.

f) Nullstelle bei $y = 0$:
$-0{,}5x + 3 = 0 \qquad | -3$
$-0{,}5x = -3 \qquad | \cdot (-2)$
$x = 6$

Damit gilt: N (6 | 0).

Prüfungen

g)



g_1: $t_1 = 4$

x	1
y	(-2) · 1 + 4 = 2

⟶ P_1 (1 | 2)

g_4: $t_4 = 1$

x	1
y	0,5 + 1 = 1,5

⟶ P_2 (1 | 1,5)

Aufgabe 4

$\frac{4}{x + 2} - \frac{3}{x - 1} = 5$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

Der Hauptnenner ist (x + 2) · (x – 1).

$$\frac{4}{x + 2} - \frac{3}{x - 1} = 5 \qquad | \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)$$

$$\frac{4(x + 2)(x - 1)}{x + 2} - \frac{3(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 5(x + 2)(x - 1) \qquad | \text{ kürzen}$$

$$4(x - 1) - 3(x + 2) = 5(x + 2)(x - 1) \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$4x - 4 - 3x - 6 = 5(x^2 - x + 2x - 2) \qquad | \text{ zusammenfassen}$$

$$x - 10 = 5(x^2 + x - 2) \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$x - 10 = 5x^2 + 5x - 10 \qquad | -x + 10$$

$$5x^2 + 4x = 0 \qquad | \text{ ausklammern}$$

$$x(5x + 4) = 0 \qquad | \text{ Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = -\frac{4}{5}$$

Da $x_1 \in \mathbb{D}$ und $x_2 \in \mathbb{D}$ ist, ergibt sich als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\frac{4}{5}; 0\}$.

Aufgabe 5

a) Zunächst wird das Volumen V (in cm^3) des Materials Messing in dieser Hohlkugel bestimmt:

$V_{Messing} = 4352\ g : 8{,}5\ \frac{g}{cm^3} = 512\ cm^3$

Das Volumen des Materials Messing beträgt 512 cm^3.

m = Dichte · V
V = m : D

Der äußere Radius der Hohlkugel beträgt 18 cm : 2 = 9 cm. Zur Berechnung des inneren Radius r_i der Hohlkugel muss folgende Gleichung nach r_i aufgelöst werden:

$V_{Messing}$ = Gesamtvolumen der Hohlkugel – Volumen der mit Luft gefüllten inneren Kugel

$$512 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r_i^3 \qquad \mid -\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3$$

$$512 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3 = -\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r_i^3 \qquad \mid : \left(-\frac{4}{3} \cdot 3{,}14\right)$$

$$\frac{512 - \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^3}{-\frac{4}{3} \cdot 3{,}14} = r_i^3 \qquad \mid \sqrt[3]{}$$

$$r_i \approx 8{,}47$$

$V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

Der innere Radius dieser Kugel beträgt etwa 8,47 cm.

b) Der Blatt-Preis von 200 €/m^2 entspricht einem Preis von 2 €/dm^2 und einem Preis von 0,02 €/cm^2. Der Oberflächeninhalt O (in cm^2) der Messingkugel wird wie folgt berechnet:
$O = 4 \cdot (12{,}5\ cm)^2 \cdot 3{,}14 = 1962{,}5\ cm^2$

Der Materialpreis P (in €) wird wie folgt berechnet:
P = 1962,5 · 0,02 = 39,25 €

$O_{Ku} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

Damit beträgt der Materialpreis für das Blattgold 39,25 €.

Aufgabe 6

a) Anzahl der Halbwertzeiten:

$n = \frac{30}{5}\ \boxed{= 6}$

Masse in mg:
$W_n = 200\ mg \cdot 0{,}5^6 \quad \Rightarrow \quad W_n = 3{,}125\ mg$

b) $n = \frac{20}{5}\ \boxed{= 4}$

Masse in mg:
$15\ mg = W_0 \cdot 0{,}5^4 \quad \Rightarrow \quad W_0 = 240\ mg$

c) Anzahl der Zerfallsperioden:

$12{,}5\ mg = 400\ mg \cdot 0{,}5^n \qquad \mid : 400\ mg$
$0{,}5^n = 0{,}03125 \qquad \mid (\log)$
$n = \log_{0{,}5} 0{,}03125$
$n = \log 0{,}03125 : \log 0{,}5$
$n = 5$

Aufgabe 7

Im gleichseitigen Dreieck gilt für alle drei Winkel: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.
Berechnung der Länge der Strecke $\overline{CG}$ in cm:

$$\cos(30°) = \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{CG}|}$$

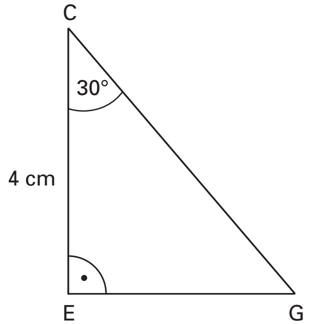
$$\cos(30°) = \frac{4}{|\overline{CG}|} \qquad | \cdot |\overline{CG}|$$

$$|\overline{CG}| \cdot \cos(30°) = 4\text{ cm} \qquad | : \cos(30°)$$

$$|\overline{CG}| = \frac{4\text{ cm}}{\cos(30°)}$$

$$|\overline{CG}| \approx 4{,}6\text{ cm}$$

Skizze:



Berechnung der Länge der Strecke $\overline{EG}$ in cm:

$$\sin(30°) = \frac{|\overline{EG}|}{|\overline{CG}|}$$

$$\sin(30°) = \frac{|\overline{EG}|}{4{,}6\text{ cm}} \qquad | \cdot 4{,}6\text{ cm}$$

$$4{,}6\text{ cm} \cdot \sin(30°) = |\overline{EG}|$$

$$|\overline{EG}| = 2{,}3\text{ cm}$$

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks FGC in cm²:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4{,}6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = 9{,}2\text{ cm}^2$$

Berechnung der Länge der Strecke $\overline{DB}$ in cm mithilfe der Strahlensätze:

$$\frac{|\overline{CG}|}{|\overline{EG}|} = \frac{|\overline{CG}| + |\overline{GB}|}{|\overline{DB}|}$$

$$\frac{4{,}6\text{ cm}}{2{,}3\text{ cm}} = \frac{4{,}6\text{ cm} + 9{,}2\text{ cm}}{|\overline{DB}|}$$

$$2 = \frac{13{,}8\text{ cm}}{|\overline{DB}|} \qquad | \cdot |\overline{DB}|$$

$$2 \cdot |\overline{DB}| = 13{,}8\text{ cm} \qquad | : 2$$

$$|\overline{DB}| = 6{,}9\text{ cm}$$

Berechnung der Länge der Strecke $\overline{ED}$ in cm mithilfe der Strahlensätze:

$$\frac{|\overline{CE}|}{|\overline{EG}|} = \frac{|\overline{CE}| + |\overline{ED}|}{|\overline{DB}|}$$

$$\frac{4\text{ cm}}{2{,}3\text{ cm}} = \frac{4\text{ cm} + |\overline{ED}|}{6{,}9\text{ cm}} \qquad | \cdot 6{,}9\text{ cm}$$

$$12\text{ cm} = 4\text{ cm} + |\overline{ED}| \qquad | - 4\text{ cm}$$

$$|\overline{ED}| = 8\text{ cm}$$

Berechnung des Radius r des Kreissektors in cm:

$r = |\overline{CE}| + |\overline{ED}|$
$r = 4\text{ cm} + 8\text{ cm}$
$r = 12\text{ cm}$

Berechnung des Flächeninhalts der Figur PQGF in cm^2:

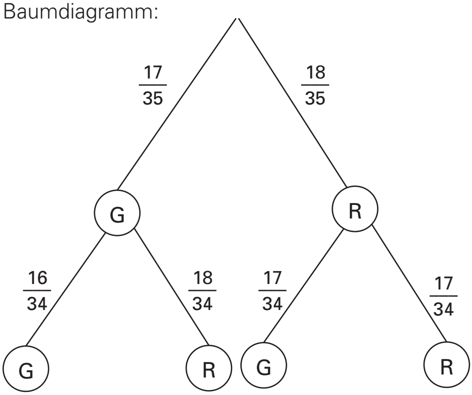
$A_{PQGF} = A_{Kreissektor} - A_{Dreieck\ FGC}$

$A_{PQGF} = \frac{1}{6} \cdot (12\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 - 9{,}2\text{ cm}^2$

$A_{PQGF} \approx 66{,}2\text{ cm}^2$

Aufgabe 8

a) Baumdiagramm:



b) P(„ein roter und ein grüner Apfel“) = P(GR) + P(RG) = $\frac{17}{35} \cdot \frac{18}{34} + \frac{18}{35} \cdot \frac{17}{34} = \frac{18}{35} \approx 0{,}51$

c) Eine Wahrscheinlichkeit von 0,2 ist als Bruch ausgedrückt $\frac{1}{5}$. Das bedeutet aber, dass sich in jeder fünften Kiste faule Kirschen befinden und nicht in jeder zweiten.

Aufgabe 9

$$\frac{144a^{25} \cdot 0{,}5b^{4} \cdot 10a^{-7}c^{-2}}{8c^{-2} \cdot 0{,}25b^{-4} \cdot 5b^{3} \cdot 12a^{15}}$$

$$= \frac{144 \cdot 0{,}5 \cdot 10a^{25}a^{-7}b^{4}c^{-2}}{8 \cdot 0{,}25 \cdot 5 \cdot 12a^{15}b^{-4}b^{3}c^{-2}}$$

$$= \frac{720a^{18}b^{4}c^{-2}}{120a^{15}b^{-1}c^{-2}}$$

$$= 6a^{3}b^{5}$$

Lösungen M I

Teil A – Seite 128

1. Fehlerbeschreibung:
siehe ausf. Lösung
Fehlerberichtigung:
$(3x^4)^2 = 3^2 \cdot (x^4)^2 = 9 \cdot x^8$

2. a) $y = 0{,}2x + 10$ (x in km; y in €)
b) 32 €

3. ☑ Die Anzahl einer bestimmten Bakterienart verdoppelt sich im Labor alle 20 Minuten.

4. Dreieck CDE
Begründung: siehe ausf. Lösung

5. Faktor 8

6. siehe ausf. Lösung

7. a) Erklärung: siehe ausf. Lösung
b) Fünf schwarze Kugeln
Begründung: siehe ausf. Lösung

8. ☑ $\frac{w}{b + d} = \frac{y}{e}$

Teil B

Aufgabengruppe I – Seite 130

1. a) $y_A = 8$; $x_B = -4$; $x_C = 2$
(oder: $x_C = -4$; $x_B = 2$).
b) $y = (x + 1)^2 + 4$; $S_1(-1 \mid 4)$
c) p_2: $y = -x^2 + 2x - 9$
d) p_3: $y = x^2 - 5x + 3{,}25$
e) siehe ausf. Lösung
f) S_4 liegt auf der y-Achse.

2. $(3a^4b - 4a^2b)^2 = (3a^4b)^2 - 24a^6b^2 + (4a^2b)^2$
$= 9a^6b^2 - 24a^6b^2 + 16a^4b^2$
(Anmerkung: Es gibt viele andere mögliche Lösungen.)

3. a) g_1: $y = -3x + 2$
b) g_2: $y = -0{,}5x + 1$
(Anmerkung: Es gibt viele andere mögliche Lösungen.)
c) N (10 | 0)
d) siehe ausf. Lösung
e) siehe ausf. Lösung

4. $x = 1{,}75$ m

5. a) $a \approx 23{,}4$ cm
b) siehe ausf. Lösung

6. $\sphericalangle HBA \approx 33{,}7°$; $|\overline{HB}| \approx 9{,}0$ cm

7. a) Variante A
b) Vom 59. Monat an
c) 13,3 %
d) siehe ausf. Lösung

8. a) $\frac{3}{11}$
b) $\frac{1}{264}$ (≈ 0,38 %)
c) $\frac{9}{11}$
d) Es ist möglich.
siehe ausf. Lösung

9. $x \approx 4{,}47$ m; $y \approx 8{,}95$ m; $h = 4$ m
$\beta \approx 63{,}5°$; $\alpha \approx 26{,}5°$